

1) Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр - целое число.

Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?

Решение:

Нам нужно максимизировать отношение

$$\frac{720}{7+2+0} = \frac{720}{9} = 80.$$

Докажем, что целое отношение, больше 80, мы получить не сможем. Сравним $\frac{\overline{7bc}}{7+b+c}$ и 80:

$$\frac{\overline{7bc}}{7+b+c} \vee 80$$

$$\overline{7bc} \vee 80(7+b+c)$$

$$700 + 10b + c \vee 560 + 80b + 80c$$

$$140 \vee 70b + 79c$$

Заметим, что если $b+c \geq 3$, то

$$70b + 79c \geq 70b + 70c = 70(b+c) \geq 70 \cdot 3 = 210 > 140.$$

Таким образом, если $b+c \geq 3$, то искомое отношение всегда меньше 80.

Если $b+c = 2$, то есть три варианта, при этом вариант, когда $b = 2$ и $c = 0$ является нашим примером. Разберем вариант $b = 1$ и $c = 1$:

$$\frac{711}{7+1+1} = \frac{711}{9} = 79 < 80.$$

Разберем вариант $b = 0$ и $c = 2$:

$$\frac{710}{7+1+0} = \frac{710}{8} = 88\frac{6}{8} \text{ — не целое.}$$

Разберем вариант $b = 0$ и $c = 1$:

$$\frac{701}{7+0+1} = \frac{701}{8} = 87\frac{5}{8} \text{ — не целое.}$$

При этом $b+c \neq 0$, так как иначе 700 делится на 100.

Значит, наибольшее целое отношение равно 80 и достигается при $b = 2, c = 0$ для числа 720.

Ответ: 80.

2) Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 7735.

Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение:

Разобьём все числа на пары соседних: в первой паре первое и второе число, во второй паре третьёе и четвёртое число и так далее. Пусть меньшее число в паре равно x . Тогда большее в 7 раз больше, то есть равно $7x$.

Сумма чисел в паре равна $8x$. Так как числа натуральные, то $x \geq 1$. Значит, сумма чисел в каждой паре не меньше, чем $8 \cdot 1 = 8$. Так как сумма всех чисел равна 7735, то пар не больше, чем

$$\frac{7735}{8} = 966\frac{7}{8}. \text{ Тогда всего чисел в последовательности не больше, чем } 966 \cdot 2 + 1 = 1933.$$

Приведём пример на 1933 числа. Пусть каждый нечётный член последовательности равен 7, каждый чётный член последовательности равен 1, то есть последовательности выглядит как 7, 1, 7, 1, ..., 7. Тогда сумма всех чисел равна

$$7 \cdot 967 + 1 \cdot 966 = 7735.$$

Ответ: 1933

- 3) Есть три коробки: в первой коробке 95 камней, во второй – 104 камня, а третья – пустая. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов. Во второй коробке оказалось 2 камня. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

Решение:

В любой момент разность чисел камней в первой и во второй коробках равна $3k+9$, где k — целое число.

Следовательно, если в первой коробке 2 камня, то во второй коробке $3k+11$ камней. Значит, во второй коробке оказалось не меньше 2 камней, а в третьей коробке не больше $199-2-2 = 195$ камней.

Пример:

95	104	0	
-1	-1	+2	95 раз
0	9	190	
+2	-1	-1	3 раза
6	6	187	
-1	-1	+2	4 раза
2	2	195	

Ответ: 195.

- 4) Даны два набора чисел: в первом наборе каждое число равно 175, а во втором — каждое число равно 80. Среднее арифметическое всех чисел двух наборов равно 145. Каждое число одного набора увеличили на натуральное число k , одновременно уменьшив на k каждое число другого набора, при условии, что все числа остались положительными. Какие целые значения может принимать среднее арифметическое всех чисел двух наборов?

Решение:

Пусть мы вычитаем $k \leq 174$ из первого набора. Тогда новое среднее арифметическое равно

$$\frac{13d(175 - k) + 6d(80 + k)}{19d} = \frac{13 \cdot 175 + 13k + 6 \cdot 80 - 6k}{19} = \frac{2775 + 7k}{19} = 145 + \frac{7k}{19}$$

Таким образом, $7k$ должно делиться на 19, то есть k должно делиться на 19. Мы знаем, что $1 \leq k \leq 79$. Значит, подойдут k равные, 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152, 171. Таким значениям k соответствуют следующие значения среднего арифметического: 138, 131, 124, 117, 110, 103, 96, 89, 82.

Пусть вычитаем $k \leq 79$ из второго набора. Тогда новое среднее арифметическое равно

$$\frac{13d(175 + k) + 6d(80 - k)}{19d} = \frac{13 \cdot 175 + 13k + 6 \cdot 80 - 6k}{19} = \frac{2775 + 7k}{19} = 145 + \frac{7k}{19}$$

Таким образом, $7k$ должно делиться на 19, то есть k должно делиться на 19. Мы знаем, что $1 \leq k \leq 79$. Значит, подойдут k , равные 19, 38, 57, 76. Таким значениям k соответствуют следующие значения среднего арифметического: 152, 159, 166, 173.

Итого получаем 13 возможных значений среднего арифметического: 82, 89, 96, 103, 110, 117, 124, 131, 138, 152, 159, 166, 173.

Ответ: 82, 89, 96, 103, 110, 117, 124, 131, 138, 152, 159, 166, 173.